

## ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КАРТ

### ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ НА СФЕРЕ И НА СФЕРОИДЕ

**Главные геодезические задачи.** Главными называют прямую и обратную геодезические задачи. Пример прямой задачи – известны широта и долгота пункта  $A$ , азимут на пункт  $B$  и расстояние до него; найти широту и долготу пункта  $B$ . Обратная задача – известны широта и долгота пунктов  $A$  и  $B$ , найти расстояние между ними, прямой и обратный азимуты.

Рассмотрим их решение на сфере, а затем на эллипсоиде вращения. Для многих картографических задач решения на сфере по точности являются приемлемыми. Однако в настоящее время системы спутникового позиционирования позволяют определять координаты точек с погрешностями от нескольких метров до первых сантиметров. Поэтому целесообразно иметь представление и о более точных способах решения главных геодезических задач.

Геодезистами разработан ряд способов решения главных геодезических задач на эллипсоиде вращения. Формулы довольно громоздки. Сложность формул зависит от требуемой точности определения широт, долгот, азимутов и длин линий между пунктами.

С какой точностью следует вести вычисления. Для Земли погрешности в широте в  $1'$ ,  $1''$ ,  $0,1''$ ,  $0,01''$ ,  $0,001''$  и  $0,0001''$  ведут к погрешностям в длинах дуг меридианов соответственно в 1,85 км, 30 м, 3 м, 3 дм, 3 см и 3 мм. Например, если координаты достаточно знать с метровой точностью, то широты и долготы следует знать до сотой доли угловой секунды.

Когда погрешности угловых величин исчисляются минутами или их долями, а линейных – сотнями метров и километрами, задачи можно решать на земном шаре. Однако при больших расстояниях между пунктами погрешности в азимутах могут даже превысить  $1^\circ$  (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Точность решения обратных геодезических задач на шаре и эллипсоидах

Исходные данные: широта $B_1$ , широта $B_2$ , разность долгот, эллипсоид	Длины $S$ на эллипсоиде <b>GRS-80</b> , ( м )	Отличия длин $S$ и азимутов $A$ на эллип- соидах от ве- личин на <b>GRS- 80</b>	Отличия длин $S$ и азимутов $A$ на шаре радиуса $R = 6371$ км от величин на <b>GRS-80</b>
50°07', 52°39', 0°15', Красовского	281 255	+ 5 м; – 0,004"	– 156 м; – 0,6'
37°20', 26°08', 41°29', Хейфорда	4 085 798	+ 169 м; – 1,2"	– 6,5 км; + 4,9'
35°16', 67°22', 137°47', Хейфорда	8 084 459	+ 365 м; + 0,50"	–20,0 км; – 1,8'
55°45', -33°26', 108°13', Бесселя	14 112 077	– 1550 м; + 2,1"	+13,1 км; +11,5'
01°00', 01°01', 179°46', Хейфорда	19 780 007	+ 644 м; – 17,1"	+ 8,9 км; ± 86,6'

В табл. 4.1 сопоставлены результаты решения обратных геодезических задач на шаре и на разных референц-эллипсоидах с результатами решений на общеземном эллипсоиде *GRS-80* (исходные данные первой строки взяты из учебного пособия [9], а данные остальных строк – из публикации [10]).

На эллипсоиде чем расстояния между пунктами больше, тем формулы сложнее. Иногда выделяют следующие группы способов:

- короткие расстояния – десятки километров;
- средние расстояния – сотни километров;
- большие расстояния – тысячи километров.

В специальных случаях, например, в навигационной практике, прямую и обратную задачи решают не по геодезической линии, а по локсадромии - линии постоянного азимута, пересекающей все меридианы под одним и тем же углом.

**Прямая задача на сфере.** Пусть на сфере радиуса  $R$  лежат две точки  $Q_1(\varphi_1, \lambda_1)$  и  $Q_2(\varphi_2, \lambda_2)$ , где  $\varphi$  - географическая широта,  $\lambda$  - географическая долгота. Точки соединены ортодромией, при этом  $\alpha$  - ее азимут,  $\sigma$  - ее длина  $s$ , выраженная в долях радиуса сферы. Соединив заданные точки с полюсом, построим сферический полярный треугольник (рис. 4.1) [6].

В прямой задаче, как уже указывалось, даны географические координаты  $\varphi_1$  и  $\lambda_1$  некоторой точки  $Q_1$ , длина ортодромии  $\sigma = s/R$  и ее прямой азимут  $\alpha_1$ ; по этим данным требуется найти координаты  $\varphi_2$  и  $\lambda_2$ , а также обратный азимут  $\alpha_2$  в точке  $Q_2$ .

По теореме косинусов сферической тригонометрии определим широту:

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \cos \sigma + \cos \varphi_1 \sin \sigma \cos \alpha_1.$$

Из теоремы котангенсов следует:

$$\operatorname{ctg} \sigma \cos \varphi_1 = \sin \varphi_1 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \operatorname{ctg}(\lambda_2 - \lambda_1)$$

Отсюда для разности долгот получаем:

$$\operatorname{tg}(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{\sin \sigma \sin \alpha_1}{\cos \sigma \cos \varphi_1 - \sin \sigma \sin \varphi_1 \cos \alpha_1}.$$

По теореме котангенсов получаем:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \sin \sigma = \cos \sigma \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \operatorname{ctg} \alpha_2$$

Отсюда для обратного азимута имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\cos \varphi_1 \sin \alpha_1}{\cos \varphi_1 \cos \sigma \cos \alpha_1 - \sin \varphi_1 \sin \sigma}.$$

**Обратная задача на сфере.** Даны географические координаты  $\varphi_1, \lambda_1$ , и  $\varphi_2, \lambda_2$  точек  $Q_1$  и  $Q_2$ ; требуется найти длину геодезической линии  $s$  между этими точками, а также ее прямой  $\alpha_1$  и обратный  $\alpha_2$  азимуты.

По теореме косинусов находим:

$$\cos \sigma = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \omega,$$

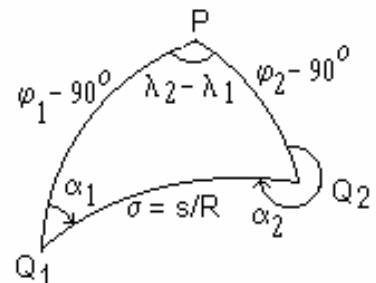


Рис. 4.1. Главные геодезические задачи на сфере

$$\omega = \lambda_2 - \lambda_1,$$

$$s = R\sigma, \text{ при отрицательном } \cos\sigma \quad s = R(\pi - |\sigma|).$$

Применяя формулы котангенсов, получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{\cos \varphi_2 \sin \omega}{\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \omega}, \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{\cos \varphi_1 \sin \omega}{\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \omega - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2}. \end{aligned}$$

**Решение главных геодезических задач на эллипсоиде на короткие расстояния.** Прежде всего, имеются в виду расстояния  $\sim 30$  км. Ознакомимся с решением по формулам со средними значениями аргументов. Материал излагается в соответствии с учебником [4, с.174-179]. Аналогичные формулы в несколько ином виде получены К.Ф. Гауссом.

**Прямая задача.** Сферический треугольник  $Q_1Q_2P$  (рис. 4.1) спроектируем на новую сферу, близкую к поверхности эллипсоида. Радиус сферы примем равным радиусу кривизны первого вертикала  $N_m$ , вычисленному по средней геодезической широте  $B_m = (B_1 + B_2)/2$ . Точку пересечения нормали широты  $B_m$  с осью вращения эллипсоида примем за центр сферы. Стороны треугольника  $Q_1Q_2P$  спроектируем на новую сферу лучами, проведенными из её центра. При таком изображении разность долгот  $l$  на эллипсоиде будет точно равна разности долгот  $\omega$  на сфере, длина геодезической линии  $s$  и ее азимуты практически равны длине ортодромии и ее азимутам. Прямую задачу решают последовательными приближениями по формулам:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{s \cos A_m}{M_m}; \quad \delta = \frac{s \sin A_m}{N_m \cos B_m}; \quad \alpha = l \sin B_m; \\ b &= \beta \left( 1 + \frac{2\delta^2 + \alpha^2}{24} \right); \quad l = \delta \left( 1 + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{24} \right); \quad a = \alpha \left( 1 + \frac{3\beta^2 + 2\delta^2 - 2\alpha^2}{24} \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Решают задачу последовательными приближениями. В первом приближении полагают  $B_m = B_1$  и  $A_m = A_1$ . Во втором и последующих приближениях принимают:

$$B_m = B_1 + b/2; \quad A_m = A_1 + a/2.$$

Окончательные значения искомых величин вычисляют как

$$B_2 = B_1 + b; \quad L_2 = L_1 + l; \quad A_2 = A_1 + a \pm 180^\circ.$$

Все угловые величины выражены в радианах. Для обеспечения точности  $0,0001''$  в координатах при расстояниях  $s < 60$  км достаточно ограничиться 3-4 приближениями.

**Обратная задача.** По координатам  $B_1, L_1, B_2, L_2$  находят:

$$\begin{aligned} b &= B_2 - B_1, \quad l = L_2 - L_1, \quad B_m = (B_1 + B_2)/2, \\ \eta_m^2 &= e'^2 \cos^2 B_m, \quad N_m = c / \sqrt{1 + \eta_m^2}, \quad M_m = N_m / (1 + \eta_m^2). \end{aligned}$$

Далее с достаточной точностью получают:

$$Q = s \cos A_m = b M_m \left( 1 - \frac{2l^2 + l^2 \sin^2 M_m}{24} \right),$$

$$P = s \sin A_m = l N_m \cos B_m \left( 1 + \frac{b^2 - l^2 \sin^2 B_m}{24} \right); \quad (4.2)$$

$$a = l \sin B_m \left( 1 + \frac{3b^2 + 2l^2 - 2l^2 \sin^2 B_m}{24} \right).$$

Решение задачи завершается вычислениями по формулам:

$$\operatorname{tg} A_m = P/Q, \quad s = \sqrt{Q^2 + P^2}, \quad A_1 = A_m - a/2, \quad A_2 = A_m + a/2 \pm 180^\circ. \quad (4.3)$$

Все угловые величины даны в радианах. Точность результатов при вычислениях на любых широтах характеризуется табл. 4.2 [4, с. 179].

Таблица 4.2

Точность решения задач по формулам

со средними аргументами

s, км	$\Delta s$ , м	$\Delta A''$
80	0,01	0,02
200	0,1	0,1
400	1	0,5
600	5	1
800	10	2

Предельные погрешности  $\Delta s$  в линиях и  $\Delta A$  в азимутах зависят от длин сторон. При длинах сторон до 800 км они не превышают графических погрешностей карт масштабов 1:100 000.

**Решение главных геодезических задач на эллипсоиде на средние и большие расстояния.** Современные возможности компьютерной техники позволяют без особых затруднений применять довольно трудоемкие с вычислительной точки зрения способы. Распространены также численные методы решения главных геодезических задач.

**Решение прямой задачи методом численного интегрирования дифференциальных уравнений геодезической линии.** Для геодезической линии на эллипсоиде можно составить три следующих дифференциальных уравнения:

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M}; \quad \frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{N \cos B}; \quad \frac{dA}{ds} = \frac{\operatorname{tg} B \sin A}{N}.$$

Два первых уравнения верны для любой кривой на эллипсоиде вращения. Их легко получить, проектируя отрезок  $ds$ , ориентированный под азимутом  $A$ , на элементарные отрезки меридиана и параллели:

$$MdB = ds \cos A,$$

$$N \cos B dL = ds \sin A.$$

Третье дифференциальное уравнение верно только для геодезической линии. Оно следует из дифференцирования уравнения геодезической линии на эллипсоиде вращения:

$$r \sin A = \text{const},$$

$$\sin A dr + r \cos A dA = 0.$$

Интегрируя дифференциальные уравнения по линии  $s$  от её начала до конца, получают:

$$B_2 - B_1 = \int_s \frac{\cos A}{M} ds,$$

$$L_2 - L_1 = \int_s \frac{\sin A}{N \cos B} ds,$$

$$A_2 - A_1 \pm 180^\circ = \int_s \frac{\operatorname{tg} B \sin A}{N} ds.$$

Эти уравнения решают численно. В учебном пособии [8, с.59] предложен следующий алгоритм решения. Выбирается достаточно малый отрезок  $h$  линии  $s$ . Тогда

$$B_{i+1} = B_i + \frac{\cos A_i}{M_i} h,$$

$$L_{i+1} = L_i + \frac{\sin A_i}{N_i \cos B_i} h,$$

$$A_{i+1} = A_i \pm 180^\circ + \frac{\operatorname{tg} B_i \sin A_i}{N_i} h.$$

После каждого шага итерации, вычисленные в левой части значения подставляются в правую часть. Сначала берётся малый произвольный шаг  $h$  и с ним выполняются вычисления. Затем шаг  $h$  уменьшают в два раза и снова выполняют все вычисления. Если дважды полученные координаты конечной точки совпадают с заданной точностью, то вычисления прекращаются, если нет, то шаг  $h$  уменьшают ещё в два раза и приближения продолжают. Однако, в учебных пособиях [4, с. 180-182; 9, с. 278-284; 5, с.52-54] применены более эффективные вычислительные методы, представляющие вариации метода Рунге-Кутта, показывающие, что задачу можно решать даже на максимально большие расстояния.

**Решение обратной задачи на любые расстояния методом простой итерации.** Метод опубликован в [5, с.52-54]. Его суть в следующем.

1. В начальной точке  $P_1$  задают приближённые значения длины  $s'$  геодезической линии и её азимута  $A'$ , полученные, например, из решения обратной задачи на сфере (рис. 4.2).
2. Решают прямую задачу по дифференциальным формулам, используя метод Рунге-Кутта-Фельберга RKF45 4-го и 5-го порядков, обеспечивающий субмиллиметровую точность для расстояний в диапазоне 0-20 000 км.
3. Имеется заданная конечная точка  $P_2$  и её приближённое положение  $P_3$ . Решая обратную задачу, находят малое расстояние  $q$  между этими точками.

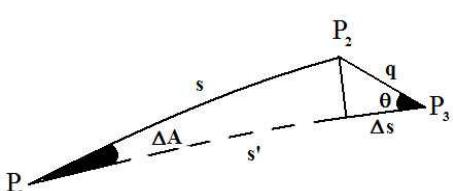


Рис.4.2. Решение обратной задачи на эллипсоиде простой итерацией

4. Вычисляют угол  $\theta$  у вершины  $P_3$  как разность азимутов линий  $P_3 P_2$  и  $P_3 P_1$ .
5. Вычисляют поправки в азимут линии и в её длину по формулам:

$$\Delta A = \arcsin(q/s'), \quad \Delta s = q \cos \theta.$$

6. Исправляют этими поправками найденные в п.1 приближенные значения азимута и длины линии. По исправленным значениям вновь выполняют вычисления п.2.

Процесс итераций повторяют до тех пор, пока расхождения между вычисленными и заданными координатами конечной точки не станут допустимыми.

**Решение главных геодезических задач способом Бесселя.** Ф. Б. Бессель - немецкий астроном и геодезист (1784–1846). Способ Бесселя был опубликован в 1825 г. Способ отличается

ется стройностью и строгостью решения. Он применим для вычисления кратчайших расстояний любой длины между двумя точками в пределах полусфера. В этом отношении он уникален и универсален. Формулы громоздки, однако в условиях современной вычислительной техники это не является проблемой.

Способ основан на отображении эллипсоида на сфере. Геодезическая линия на сфере отображается дугой большого круга – ортодромией. На ней расположены три точки –  $Q_0$ ,  $Q_1$  и  $Q_2$  (рис. 4.3). Азимуты линии в этих точках  $A_0$ ,  $A_1$  и  $A_2$ .

Суть отображения следует из геометрической интерпретации уравнения геодезической линии, которое может быть записано следующим образом:

$$\sin A_0 = \cos U_1 \sin A_1 = \cos U_2 \sin A_2,$$

или

$$\frac{\sin A_1}{\sin(90 - U_2)} = \frac{\sin A_2}{\sin(90 - U_1)},$$

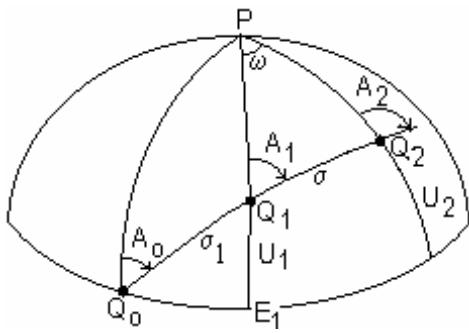


Рис. 4.3. Отображение геодезической линии на сфере Бесселя

сферическому треугольнику  $Q_1PQ_2$ .

Таким образом, отображение эллипсоида на сферу выполняется при следующих условиях: 1) геодезическая линия изображается ортодромией — дугой большого круга; 2) на сфере азимуты ортодромии равны азимутам геодезической линии на эллипсоиде; 3) геодезическим широтам на эллипсоиде соответствуют приведенные широты на сфере.

Взаимосвязь между длинами ортодромии  $\sigma = Q_1Q_2$  и геодезической линии  $s$  на эллипсоиде, а также между углом  $\omega$  у полюса  $P$  и разностью долгот этих точек  $l = L_2 - L_1$  устанавливается с помощью дифференциальных уравнений. Для этого рассмотрим бесконечно малые соответственные треугольники на эллипсоиде и на указанной сфере (рис.4.4).

Для этих треугольников имеем:

$$\frac{MdB}{ds} = \frac{dU}{d\sigma} = \cos A, \quad \frac{rdL}{ds} = \frac{\cos U d\omega}{d\sigma} = \sin A.$$

После преобразований получаем:

$$ds = M \frac{dB}{dU} d\sigma, \quad dL = \frac{M}{a} \frac{dB}{dU} d\omega,$$

где  $a$  — большая полуось эллипсоида. Дифференцируя формулы радиуса параллели

$$r = a \cos U = N \cos B,$$

получаем:

$$\frac{dr}{dU} = -a \sin U = -M \sin B \frac{dB}{dU},$$

$$\frac{dB}{dU} = \frac{a \sin U}{M \sin B}.$$

Выразив синусы через тангенсы, получаем:

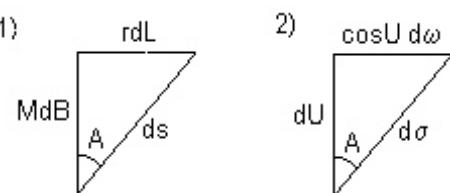


Рис. 4.4. Элементарные треугольники эллипсоида и сферы  $R=1$

$$\frac{dB}{dU} = \frac{a}{M} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 U}.$$

С учетом последнего выражения получаем:

$$ds = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 U} d\sigma, \quad (4.4)$$

$$dL = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 U} d\omega \quad (4.5)$$

Интегрируя эти уравнения вдоль дуги большого круга между точками  $Q_1$  и  $Q_2$  (рис. 4.3), устанавливают зависимости между длинами  $s$  и  $\sigma$ , и углами  $l$  и  $\omega$ . При этом имеют дело с так называемыми эллиптическими интегралами, которые можно решить численно, или разложением в ряды функций под знаком интеграла. Решением этих интегралов занимались многие учёные, предлагая свои варианты способов. Ознакомиться подробнее со способом Бесселя можно, например, по работам [4, 3]. Он использован также в [7].

Ниже рассмотрим решения в модификации [10]. В 1975 году T. Vincenty опубликовал способ решения прямой и обратной геодезической задачи, отличающийся высокой точностью. Способ также описан в пособии [3]. В данной работе изменены некоторые обозначения и формулы. Приведены упрощенные формулы, однако обеспечивающие максимальную погрешность не более 0,00005", или в линейной мере не больше 1,5 мм [10].

В формулах использованы малая полуось  $b$  эллипсоида и его сжатие  $\alpha$ ,  $B$  – геодезическая широта,  $U$  – приведённая широта,  $l$  – разность геодезических долгот,  $s$  – длина геодезической линии,  $A_0$ ,  $A_1$  и  $A_2$  – азимуты геодезической линии в точках  $Q_0$ ,  $Q_1$  и  $Q_2$ ,  $\omega$  – разность долгот на сфере,  $\sigma$  – угловое расстояние на сфере между точками  $Q_1$  и  $Q_2$ ,  $\sigma_1$  – угловое расстояние на сфере от экватора до точки  $Q_1$ ,  $\sigma_m$  – угловое расстояние на сфере от экватора до середины линии (рис. 4.3).

**Решение прямой задачи.** Задача начинается с пересчёта геодезической широты в приведённую широту и вычисления ряда вспомогательных величин.

$$\operatorname{tg} U_1 = (1 - \alpha) \operatorname{tg} B_1. \quad (4.6)$$

$$\operatorname{tg} \sigma_1 = \operatorname{tg} U_1 / \cos A_1. \quad (4.7)$$

$$\sin A_0 = \cos U_1 \sin A_1 \quad (4.8)$$

$$k^2 = e'^2 \cos^2 A_0. \quad (4.9)$$

$$A = 1 + \frac{k^2}{256} \left( 64 + k^2 \left( -12 + 5k^2 \right) \right), \quad (4.10)$$

$$B = \frac{k^2}{512} \left( 128 + k^2 \left( -64 + 37k^2 \right) \right).$$

Итерациями вычисляется  $\sigma$ :

$$2\sigma_m = 2\sigma_1 + \sigma, \quad (4.11)$$

$$\Delta\sigma = B \sin \sigma \left( \cos 2\sigma_m + \frac{1}{4} B \cos \sigma (-1 + 2 \cos^2 2\sigma_m) \right), \quad (4.12)$$

$$\sigma = \frac{s}{bA} + \Delta\sigma. \quad (4.13)$$

В первом приближении принимается  $\Delta\sigma = 0$ . Итерации продолжаются до тех пор, пока изменения  $\sigma$  не будут меньше наперёд заданной величины.

Вычисляется широта второй точки:

$$\sin U_2 = \sin U_1 \cos \sigma + \cos U_1 \sin \sigma \cos A_1,$$

$$\operatorname{tg} B_2 = \frac{\sin U_2}{(1-\alpha)\sqrt{1-\sin^2 U_2}}.$$

Вычисляется разность долгот:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \omega &= \frac{\sin \sigma \sin A_1}{\cos U_1 \cos \sigma - \sin U_1 \sin \sigma \cos A_1}, \\ C &= \frac{\alpha}{16} \cos^2 A_0 [4 + \alpha (4 - 3 \cos^2 A_o)],\end{aligned}\quad (4.14)$$

$$l = \omega - (1-C)\alpha \sin A_0 \{ \sigma + C \sin \sigma [\cos 2\sigma_m + C \cos \sigma (-1 + 2 \cos^2 2\sigma_m)] \}. \quad (4.15)$$

Определяется азимут на второй точке:

$$\operatorname{tg} A_2 = \frac{\sin A_0}{-\sin U_1 \sin \sigma + \cos U_1 \cos \sigma \cos A_1}.$$

Под  $A_2$  можно понимать как азимут в направлении  $Q_1 Q_2$ , так и азимут в обратном направлении  $Q_2 Q_1$ ; они различаются на  $180^\circ$  и формулой тангенса это различие не фиксируется.

Выражение (4.7) для величины  $\sigma_1$  найдено из сферического прямоугольного треугольника  $Q_0 Q_1 E_1$  (рис. 4.3).

**Решение обратной задачи.** Последовательными приближениями вычисляются на сфере разность долгот  $\omega$  и расстояние  $\sigma$ . В первом приближении принимается  $\omega = l$ . Далее:

$$\begin{aligned}\cos \sigma &= \sin U_1 \sin U_2 + \cos U_1 \cos U_2 \cos \omega, \\ \sin \sigma &= \sqrt{1 - \cos^2 \sigma}, \quad \operatorname{tg} \sigma = \sin \sigma / \cos \sigma.\end{aligned}\quad (4.16)$$

$$\sin A_0 = \cos U_1 \cos U_2 \sin \omega / \sin \sigma, \quad (4.17)$$

$$\cos^2 A_0 = 1 - \sin^2 A_0,$$

$$\cos 2\sigma_m = \cos \sigma - 2 \sin U_1 \sin U_2 / \cos^2 A_0, \quad (4.18)$$

$$\omega = l + (1-C)\alpha \sin A_0 \{ \sigma + C \sin \sigma [\cos 2\sigma_m + C \cos \sigma (-1 + 2 \cos^2 2\sigma_m)] \}. \quad (4.19)$$

В (4.19) подставляются результаты из формулы (4.14). Приближения продолжаются, пока изменения  $\omega$  не станут допустимыми. Вычисляется длина линии на эллипсоиде:

$$s = bA(\sigma - \Delta\sigma),$$

где  $\Delta\sigma$ , коэффициенты  $A$  и  $B$  определяются формулами (4.12) и (4.10).

Вычисляются азимуты:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} A_1 &= \frac{\cos U_2 \sin \omega}{\cos U_1 \sin U_2 - \sin U_1 \cos U_2 \cos \omega}, \\ \operatorname{tg} A_2 &= \frac{\cos U_1 \sin \omega}{-\sin U_1 \cos U_2 + \cos U_1 \sin U_2 \cos \omega}.\end{aligned}$$

Формулы для обратной задачи не дадут результата, если величина  $\omega$ , рассчитанная по формуле (4.19) по абсолютной величине окажется более  $\pi$ .

**Замечания по способу.** В [10] отмечается, что на экваторе формулы (4.7) и (4.18) становятся неопределенными. Однако, если деление на ноль исключить, то решение будет правильным. В этом случае  $B = C = 0$  и  $\Delta\sigma, l, \omega$  будут вычислены правильно. Такие выражения, как для  $\operatorname{tg}B_2, \operatorname{tg}A_2, \sin^2\sigma$  и  $\operatorname{tg}A_1$ , достаточно вычислить однажды, сохранить и использовать дальше. Если нужен обратный азимут  $A_2$  (азимут с  $Q_2$  на  $Q_1$ ), то это надо иметь в виду при его вычислении.

В публикации [Vincenty] приведён лишь алгоритм способа. Подробных выводов нет. Поэтому в формулах для  $\operatorname{tg}B_2$  и  $\sin^2\sigma$  нами использованы их более простые исходные выражения. Формула (4.17) может быть получена из сферического треугольника  $Q_1PQ_2$  по теореме синусов (рис. 4.3):

$$\frac{\sin \omega}{\sin \sigma} = \frac{\sin A_1}{\cos U_2} = \frac{\cos U_1 \sin A_1}{\cos U_1 \cos U_2} = \frac{\sin A_0}{\cos U_1 \cos U_2}.$$

Отсюда непосредственно следует (4.17).

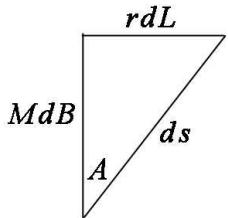
Формула (4.18) может быть получена следующим образом. Из сферических треугольников  $Q_0PQ_1$  и  $Q_0PQ_2$ , применением теоремы косинусов к сторонам “полюс - экватор”, имеем:

$$\sin U_1 = \sin \sigma_1 \cos A_0, \quad \sin U_2 = \sin(\sigma_1 + \sigma) \cos A_0.$$

Перемножив соответственно левые и правые части, удвоив эти произведения и в правой части заменив произведение синусов сторон разностью косинусов от суммы ( $2\sigma_m = 2\sigma_1 + \sigma$ ) и разности этих сторон ( $\sigma$ ), получим выражение (4.18).

**Решение задач по локсадромии.** В специальных случаях, например, в навигационной практике, прямую и обратную задачи решают не по геодезической линии, а по локсадромии.

Из элементарного треугольника на поверхности эллипсоида вращения (рис. 4.5) имеем:



$$MdB = \cos A ds,$$

$$rdL = \sin A ds,$$

$$\frac{rdL}{MdB} = \operatorname{tg} A.$$

Рис. 4.5. Элементарный треугольник на эллипсоиде

В случае локсадромии азимут сохраняет постоянное значение. Интегрируя эти выражения по линии  $S$  от точки  $Q_1$  до  $Q_2$ , получаем [2, с.151]:

$$\begin{aligned} X_2 - X_1 &= S \cos A, \\ r_m(L_2 - L_1) &= S \sin A, \\ L_2 - L_1 &= \operatorname{tg} A(q_2 - q_1). \end{aligned}$$

В формулах  $X, r_m, q$  – соответственно длина дуги по меридиану от экватора до заданной точки, некий промежуточный радиус параллели между геодезическими координатами точек  $Q_1$  и  $Q_2$ , изометрическая широта, вычисляемая от экватора до рассматриваемой параллели. Как уже отмечалось (Лекция 3),

$$q = \int_0^B \frac{M}{r} dB, \quad q = \ln \left\{ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \sqrt{\left( \frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right)^e} \right\}.$$

**Алгоритм решения прямой задачи по локсадромии.** Исходными величинами являются широта  $B_1$ , долгота  $L_1$  исходной точки, прямой азимут  $A_1$  и длина локсадромии  $S$  до определяемой точки. Определяемыми являются долгота  $L_2$ , широта  $B_2$  искомой точки и обратный азимут  $A_2$ . Задача решается в нижеследующей последовательности [7].

1. По широте  $B_1$  вычисляется длина дуги меридиана  $X_1$ .
2. Определяется длина дуги меридиана от экватора до параллели искомой точки

$$X_2 = X_1 + S \cos A_1.$$

3. По дуге меридиана  $X_2$  вычисляется широта  $B_2$  (Лекция 3).
4. По геодезическим широтам  $B_1$  и  $B_2$  вычисляются изометрические широты  $q_1$  и  $q_2$ .
5. Определяется долгота искомого пункта

$$L_2 = L_1 + (q_2 - q_1) \operatorname{tg} A_1.$$

6. Вычисляется обратный азимут  $A_2$ . Он отличается от прямого азимута на  $180^\circ$ .

**Алгоритм решения обратной задачи по локсадромии.** Исходными величинами являются широты  $B_1$ ,  $B_2$  и долготы  $L_1$ ,  $L_2$  двух пунктов. Необходимо найти длину локсадромии  $S$  между пунктами, а также прямой  $A_1$  и обратный  $A_2$  азимуты. Алгоритм решения задачи следующий.

1. Вычисляются изометрические широты  $q_1$  и  $q_2$ , разность долгот и находятся азимуты.

$$\operatorname{tg} A_1 = (L_2 - L_1) / (q_2 - q_1), \quad A_2 = A_1 + \pi.$$

2. По широтам  $B_1$ ,  $B_2$  вычисляются длины дуг меридианов  $X_1$  и  $X_2$ .
3. Определяется длина  $S$  локсадромии. При этом, если  $B_1 \neq B_2$ , тогда

$$S = (X_2 - X_1) / \cos A_1,$$

иначе

$$S = N \cos B_1 (L_2 - L_1).$$

На рис. 4.6 приведены построения в косой азимутальной равновеликой проекции ортодромии и локсадромии. Ортодромия почти прямой линией пересекает Атлантический океан,

Южную Америку и заканчивается в Тихом океане. Локсадромия в данном случае очень близка к ортодромии. Над Атлантическим океаном она проходит несколько южнее ортодромии, а над Тихим океаном – несколько севернее ортодромии. Иными словами, ортодромия располагается ближе к полюсам, а локсадромия – ближе к экватору. Расстояние по локсадромии на эллипсоиде Красовского оказалось равным 19 890 605,69 м – длиннее геодезической линии всего на 390,6 км или на 2%.

Следует заметить, что на меридианах и на экваторе линии кратчайшего расстояния и постоянного азимута совпадают. Различие между длинами отрезков ортодромии и локсадромии проявляется сильнее всего, если отрезок расположен вдоль параллели. При длинах отрезков до 8200 км на  $30^\circ$  параллели и до 1900 км на  $70^\circ$  параллели эти различия



Рис. 4.6. Изображения ортодромии и локсадромии

достигают 3% [1].

**Источники информации по Лекции 4**

1. Гинзбург Г. А., Салманова Т. Д. Тр. ЦНИИГАиК. М.: Недра. 1964. Вып. 160. 340 с.
2. Каврайский В.В. Математическая картография. – Ленинград-Москва. Госкартотрест. 1934. -275 с.
3. Комаровский Ю. А. Использование различных референц-эллипсоидов в судовождении [Электронный ресурс], (Дата обращения 24.05.2014). URL: <http://sveos.msun.ru/edu/lit/kaf/tss/ell.pdf>
4. Морозов В. П. Курс сфериодической геодезии. Учебник для вузов. – М.: Недра, 1979. –260 с.
5. Оньков И.В. Решение обратной геодезической задачи на большие расстояния методом простой итерации. Геопрофи. 2013. №6. С. 52-54.
6. Серапинас Б. Б. Геодезические основы карт. Учебное пособие. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. -132 с.
7. Серапинас Б. Б. Практикум по геодезическим основам карт. Учебное пособие. М.: Географический факультет МГУ. 2008. -146 с.
8. Тищенко А. П. Геодезические основы карт. Учебное пособие. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. -174 с.
9. Яковлев Н. В., Беспалов Н. А., Глумов В. П. и др. Практикум по высшей геодезии. Учебное пособие для вузов. М.: Недра, 1982. 368 с.
10. Vincenty T. Direct and inverse solutions of geodesics on the ellipsoid with application of nested equations // Survey review. Vol. XXIII, N 176, p. 88–93.

**Контрольные вопросы**

1. Способы решения главных геодезических задач. Представление о точности их решений.
2. Решения прямой и обратной задач на сфере.
3. Решение прямой задачи методом численного интегрирования дифференциальных уравнений геодезической линии. Решение обратной задачи на любые расстояния методом простой итерации.
4. Решение главных геодезических задач способом Бесселя. Условия выбора сферы. Дифференциальные уравнения взаимосвязи линейных и угловых элементов на эллипсоиде и на сфере. Понятие о способе Т. Vincenty.